Całka potrójna – zastosowania fizyczne

Zastosowania fizyczne całki potrójnej

Niech $\rho(x,y,z)$ będzie gęstością pewnego obszaru przestrzennego $V \subset \mathbb{R}^3$. Możemy wówczas zapisać następujące wzory:

Masa obszaru V:

$$m = \iiint_V \rho(x,y,z)dxdydz \,. \tag{10}$$

Momenty statyczne obszaru V *względem płaszczyzn Oxy, Oyz, Oxz*:

$$M_{xy} = \iiint_V z\rho(x,y,z)dxdydz \,. \tag{11}$$

$$M_{yz} = \iiint_V x\rho(x,y,z)dxdydz \,. \tag{12}$$

$$M_{xz} = \iiint_V y\rho(x,y,z)dxdydz \,. \tag{13}$$

Współrzędne środka ciężkości C *obszaru* V:

$$x_C = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_C = \frac{M_{xz}}{m}, \quad z_C = \frac{M_{xy}}{m} \,. \tag{14}$$

Momenty bezwładności obszaru V *względem osi Ox, Oy, Oz*:

$$I_x = \iiint_V \left(y^2 + z^2\right)\rho(x,y,z)dxdydz \,. \tag{15}$$

$$I_y = \iiint_V \left(x^2 + z^2\right)\rho(x,y,z)dxdydz \,. \tag{16}$$

$$I_z = \iiint_V \left(x^2 + y^2\right)\rho(x,y,z)dxdydz \,. \tag{17}$$

Momenty bezwładności obszaru V *względem płaszczyzn Oxy, Oyz, Oxz*:

$$I_{xy} = \iiint\limits_V z^2 \rho(x,y,z)dxdydz\,. \tag{19}$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_V x^2 \rho(x,y,z)dxdydz\,. \tag{20}$$

$$I_{xz} = \iiint\limits_V y^2 \rho(x,y,z)dxdydz\,. \tag{21}$$

Moment bezwładności obszaru V *względem początku* O *układu*:

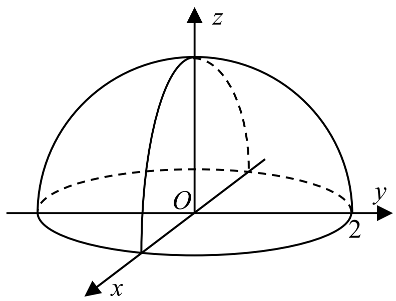
$$I_O = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\rho(x,y,z)dxdydz\,. \tag{22}$$

Przykład 6. Obliczyć masę, wszystkie momenty statyczne oraz współrzędne środka ciężkości półkuli $V: x^2 + y^2 + z^2 \le 4$, $z \ge 0$, której gęstość $\rho(x,y,z) = z$.

Rozwiązanie.

Obszar V przedstawiono na rysunku 11. Wymagane całki potrójne obliczymy dokonując zamiany zmiennych na współrzędne sferyczne:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}.$$



Rys. 11

Zauważmy, że gdy punkt $P(x,y,z)$ zmienia się w obszarze V to jego współrzędne sferyczne (r,φ,θ) spełniają nierówności:

$$0 \le r \le 2\,,\quad 0 \le \varphi \le 2\pi\,,\quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\,.$$

Obliczamy najpierw masę obszaru V (przy obliczaniu całki potrójnej skorzystamy z twierdzenia 4, punkt 2°):

$$m = \iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_V z\,dxdydz = \iiint\limits_{V'} r\cos\theta\, r^2 \sin\theta\, drd\varphi d\theta =$$

$$=\iiint\limits_{V'} r^3 \sin\theta\cos\theta\; drd\varphi d\theta = \int\limits_0^2 r^3 dr\cdot\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\, d\theta =$$

$$=\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^2\cdot[\varphi]_0^{2\pi}\cdot\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2} = 4\pi\,.$$

Stosując wzór (11) wyznaczamy moment statyczny bryły V względem płaszczyzny *Oxy*:

$$M_{xy} = \iiint\limits_V z\rho(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_V z^2\; dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{V'} r^2\cos^2\theta\; r^2\sin\theta\, drd\varphi d\theta = \iiint\limits_{V'} r^4\cos^2\theta\sin\theta\, drd\varphi d\theta =$$

$$= \int\limits_0^2 r^4 dr\cdot\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\sin\theta\, d\theta\,.$$

Wykonajmy pomocnicze obliczenia:

$$\int\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta \left|\begin{array}{c}\cos\theta = t\\ -\sin\theta d\theta = dt\\ \sin\theta d\theta = -dt\end{array}\right| = -\int t^2 dt = -\frac{1}{3}t^3 + C = -\frac{1}{3}\cos^3 t + C\,.$$

Zatem

$$M_{xy} = \left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^2\cdot[\varphi]_0^{2\pi}\cdot\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{5}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{3} = \frac{64}{15}\pi\,.$$

Obliczamy moment statyczny względem płaszczyzny *Oyz*:

$$M_{yz} = \iiint\limits_V x\rho(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_V xzdxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{V'} r\cos\varphi\sin\theta\cdot r\cos\theta\cdot r^2\sin\theta\, drd\varphi d\theta =$$

$$= \iiint\limits_{V'} r^4\cos\varphi r\cos\theta\sin^2\theta\, drd\varphi d\theta =$$

$$= \int_0^2 r^4 dr \cdot \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin^2\theta d\theta .$$

Zauważmy, że ponieważ:

$$\int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi = [\sin\varphi]_0^{2\pi} = 0 ,$$

zatem $M_{yz} = 0$.

Obliczamy moment statyczny względem płaszczyzny *Oxz*:

$$M_{xz} = \iiint_V y\rho(x, y, z) dxdydz = \iiint_V yzdxdydz =$$

$$= \iiint_{V'} r\sin\varphi \sin\theta \cdot r\cos\theta \cdot r^2 \sin\theta drd\varphi d\theta =$$

$$= \iiint_{V'} r^4 \sin\varphi r \cos\theta \sin^2\theta drd\varphi d\theta =$$

$$= \int_0^2 r^4 dr \cdot \int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin^2\theta d\theta .$$

Ponieważ:

$$\int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi = [-\cos\varphi]_0^{2\pi} = 0 ,$$

zatem $M_{xz} = 0$.

Na koniec wyznaczamy współrzędne środka ciężkości obszaru V:

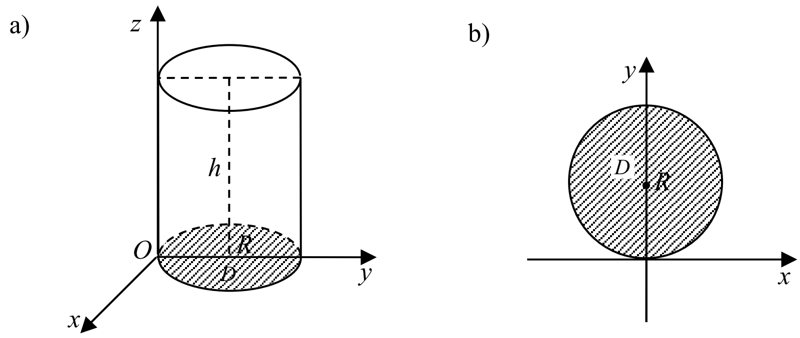
$$x_C = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{0}{4\pi} = 0 ,$$

$$y_C = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{0}{4\pi} = 0 ,$$

$$z_C = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\frac{64}{15}\pi}{4\pi} = \frac{16}{15} .$$

Przykład 7. Obliczyć moment bezwładności jednorodnego (przyjmijmy $\rho(x,y,z)=1$) walca V o promieniu podstawy R i wysokości h względem tworzącej tego walca.

Rozwiązanie. Umieśćmy walec V w układzie współrzędnych tak, aby oś Oz była tworzącą tego walca (rys. 12a).



Rys. 12. Ilustracja do przykładu 7

Z uwagi na kształt bryły V wprowadzimy współrzędne walcowe:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}.$$

Patrząc na rzut D obszaru V na płaszczyznę Oxy (rys. 12b) łatwo zauważyć, że współrzędna walcowa φ dowolnego punktu zakreślonego obszaru spełnia warunek:

$$0 \le \varphi \le \pi.$$

Aby określić zakres zmienności współrzędnej r obszaru D zapiszmy najpierw równanie brzegu (czyli równanie okręgu) tego obszaru we współrzędnych kartezjańskich:

$$x^2 + (y-R)^2 = R^2.$$

W równaniu tym w miejsce x i y podstawmy odpowiednio: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$:

$(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi - R)^2 = R^2$,

$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi - 2rR\sin\varphi + R^2 = R^2$,

$r^2 - 2rR\sin\varphi = 0$,

$r(r - 2R\sin\varphi) = 0$.

Z ostatniego równania po uproszczeniu otrzymujemy równanie powyższego okręgu we współrzędnych biegunowych:

$$r = 2R\sin\varphi .$$

Zatem współrzędna walcowa r dowolnego punktu obszaru V spełnia warunek:

$$0 \le r \le 2R\sin\varphi .$$

Ostatecznie możemy zapisać:

$$V' = \{(r,\varphi,z):\ 0 \le r \le 2R\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le z \le h\} .$$

Stosując wzór (17) oraz dokonując zamiany zmiennych w całce potrójnej wyznaczamy odpowiedni moment bezwładności:

$$I_z = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right)\rho(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{V'} \left(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin\varphi\right) r\,drd\varphi dz = \iiint\limits_{V'} r^3\,drd\varphi dz =$$

$$= \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2R\sin\varphi} dr \int_0^{h} r^3 dz = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2R\sin\varphi} \left[r^3 z\right]_0^h dr = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2R\sin\varphi} h\,r^3 dr =$$

$$= h\int_0^{\pi} \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^{2R\sin\varphi} d\varphi = 4R^4 h \int_o^{\pi} \sin^4\varphi\, d\varphi .$$

Stosując odpowiedni wzór rekurencyjny wykonujemy obliczenia pomocnicze:

$$\int \sin^4\varphi\, d\varphi = -\frac{1}{4}\sin^3\varphi\cos\varphi + \frac{3}{4}\int \sin^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{4}\sin^3\varphi\cos\varphi + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{2}\int d\varphi\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\sin^3\varphi\cos\varphi - \frac{3}{8}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{3}{8}\varphi + C .$$

Stąd otrzymujemy:

$$I_z = 4R^4 h\left[-\frac{1}{4}\sin^3\varphi\cos\varphi - \frac{3}{8}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{3}{8}\varphi\right]_0^{\pi} = 4R^4 h \cdot \frac{3}{8}\pi = \frac{3}{2}\pi R^4 h\ .$$

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch